

#01.

La función Contadora de los números primos

Forma exacta.

$$\pi(n) = \sum_{k=4}^n (k-2)! \pmod{k}$$

fórmula 100% precisa, elegante y sencilla
basada en el Teorema de Wilson, pero
inviable en la práctica.
para $n \geq 4$

Estudiando la integral logarítmica.

$$(1) \quad l_1(x) = \frac{x}{\log(x)} \left(1 + \frac{1}{\log(x) - 2 - f(x)} \right)$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow 0$

$$(2) \quad l_2(x) = \frac{x}{\log(x) - 1 - \frac{1}{\log(x) - 3 - g(x)}}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, $g(x) \rightarrow 0$

$$(3) \quad \text{Cuando } x \rightarrow \infty, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Basado en las ecuaciones (1), (2) y (3)
hallamos una expresión que nos de
aproximaciones de $l_1(x)$
sustituyendo $g(x) = 2 f(x)$ en la
ecuación (2), e igualando (1) y (2)
obtenemos

La función contadora de los números primos #02

$$\frac{x}{\log(x)} \left(1 + \frac{1}{\log(x) - 2 - f(x)} \right)$$

$\approx$

$$\frac{x}{\log(x) - 1 - \frac{x}{\log(x) - 3 - 2f(x)}}$$

Lo cual nos conlleva a una ecuación de segundo grado, una de sus soluciones es

$$(4) \quad f(x) \approx -1 + \frac{\log(x) - \sqrt{\log^2(x) - 8\log(x)}}{4}$$

Sustituyendo (4) en (1)

$$li(x) \approx \frac{x}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3\log(x) - 4 + \sqrt{\log^2(x) - 8\log(x)}} \right)$$

Definimos la función $H(x)$

$$H(x) = \frac{x}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3\log(x) - 4 + \sqrt{\log^2(x) - 8\log(x)}} \right)$$

Entonces

$$H(x) \approx li(x)$$

#03

La función Contadora de los números primos.

Definimos la función $t(x)$

$$t(x) = \frac{x}{H(x)} (\sqrt{H(x)} - \sqrt{\pi(x)})$$

$$x > e^8$$

Observamos que $t(x)$ es una función virtualmente periódica.

procedamos a despejar $\pi(x)$

$$\pi(x) = \frac{x}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3\log(x) - 4 + \sqrt{\log^2(x) - 8\log(x)}} \right)$$

$$- \frac{2t(x)\sqrt{H(x)}}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3\log(x) - 4 + \sqrt{\log^2(x) - 8\log(x)}} \right)$$

$$+ \frac{t^2(x)}{\log^2(x)} \left(1 + \frac{4}{3\log(x) - 4 + \sqrt{\log^2(x) - 8\log(x)}} \right)$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, el tercer término de la derecha $\rightarrow 0$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3\log(x) - 4 + \sqrt{\log^2(x) - 8\log(x)}} \right)$$

$$(x - 2t(x)\sqrt{H(x)})$$

La función Contadora de los números primos. # 04

Sabiendo $\frac{\sqrt{H(x)}}{\log(x)} - \frac{\sqrt{I_1(x)}}{\log(x)}$ tiende

Veriginosamente a 0, cuando $x \rightarrow \infty$,
reemplazamos $H(x)$ por $I_1(x)$

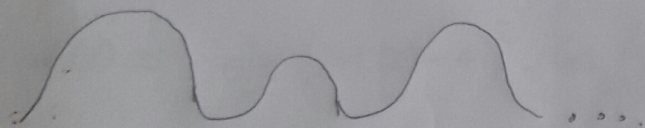
$$\pi(x) \approx \frac{x - 2t(x) \sqrt{I_1(x)}}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3 \log(x) - 4 + \sqrt{109^2(x) - 8 \log(x)}} \right)$$

Haciendo $2t(x) = M(x)$

$$\pi(x) \approx \frac{x - M(x) \sqrt{I_1(x)}}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3 \log(x) - 4 + \sqrt{109^2(x) - 8 \log(x)}} \right)$$

Si x es una potencia de e , y despejamos

$M(x)$, observamos que su gráfica se asemeja
a la siguiente curva.



Cuando $e^8 \leq x \leq e^{24}$,

$$M(x) \approx 2 \cos\left(\frac{\log(x)}{8} \pi\right) + 4$$

Faltando por establecer una fórmula general
para $M(x)$.

La función Contadora de los números primos

#05

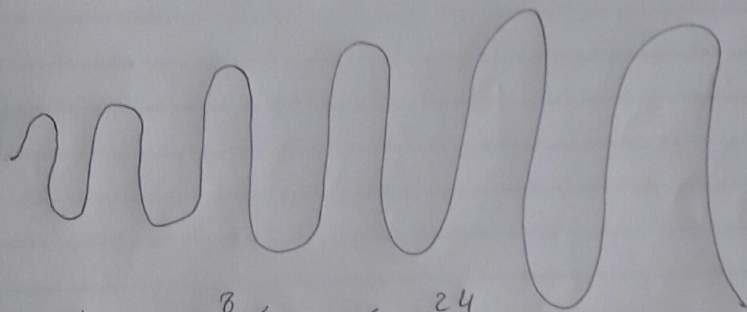
Definimos $P(x)$

$$P(x) = \frac{x - M(x)\sqrt{11}(x)}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3\log(x) - 4 + \sqrt{11\log^2(x) - 8\log(x)}} \right)$$

Definimos $W(x)$

$$W(x) = \pi(x) - P(x)$$

Si x es una potencia de e , observamos que la gráfica de $W(x)$ se asemeja a la siguiente curva



Cuando $e^8 \leq x \leq e^{24}$,

$$W(x) \approx \frac{1}{2} (\log(x) - 4)^2 \cdot \cos\left(\frac{\log(x)}{8} - \pi\right)$$

Faltando por establecer una fórmula general para $W(x)$

Definimos la función $Q(x)$.

$$Q(x) = \frac{x - M(x)\sqrt{11}(x)}{\log(x)} \left(1 + \frac{4}{3\log(x) - 4 + \sqrt{11\log^2(x) - 8\log(x)}} \right) + W(x).$$

Luego $Q(x) \approx \pi(x)$.